УДК 517.982.27

**С. В. Асташкин**

# Об экстраполяционных свойствах шкалы $L_p$-пространств

На шкале $L_p$-пространств $(1<p<\infty)$ вводится новый класс экстраполяционных функторов, позволяющий описать в качестве ее предельных пространств симметричные пространства, "близкие" к $L_\infty$ и $L_1$. Ключевыми при этом являются доказанные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов Петре в банаховых парах $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$ и $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ соответственно ($\operatorname{Exp} L^\beta$ и $L(\log L)^{1/\beta}$, $\beta>0$, – пространства Зигмунда).

В работе используется вещественный метод интерполяции операторов.

Библиография: 22 названия.

## Введение

Напомним классическую экстраполяционную теорему Яно (см. [1] или [2; гл. 12, теорема 4.41]), являющуюся в некотором смысле обращением теоремы Марцинкевича об интерполяции линейных операторов [2; гл. 12, теорема 4.6]. Предположим, что $T$ – линейный оператор, ограниченный в пространствах $L_p=L_p[0,1]$ для всех $p$ из некоторой правой полуокрестности единицы, и $\|T\|_{L_p\to L_p}=O((p-1)^{-\alpha})$ $(p\to 1+)$ при некотором $\alpha>0$. Тогда $T$ можно определить на пространстве Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ (определения см. ниже) так, что он будет ограниченно действовать из этого пространства в $L_1$. Верно и двойственное утверждение, относящееся к пространству $\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$, сопряженному к $L(\log L)^\alpha$. Если линейный оператор $T$ ограничен в $L_p$ для всех достаточно больших $p$ и при некотором $\alpha>0$ $\|T\|_{L_p\to L_p}=O(p^\alpha)$ $(p\to\infty)$, то $T\colon L_\infty\to \operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$.

В 90-е годы прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная, прежде всего, с именами В. Яверса и М. Мильмана [3]–[5]. Ими было начато систематическое изучение естественных предельных пространств, ассоциированных с интерполяционными шкалами пространств, на основе которого можно получать оценки норм операторов, действующих в них. Библиографию многочисленных приложений теории экстраполяции к анализу см. также в [3]–[5].

Заметим, что в качестве конструкций (экстраполяционных функторов), приводящих к построению новых предельных пространств, В. Яверс и М. Мильман рассматривали сумму и пересечение семейств банаховых пространств (см., например, [4; § 2] или [5; гл. 2]). Это позволяет получать в качестве экстраполяционных лишь пространства вида $(X_0,X_1)^{\mathscr{J}}_{l_1(1/\rho)}$ и $(X_0,X_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(1/\rho)}$, где $(X_0,X_1)$ – произвольная банахова пара, а $\rho$ – квазивогнутая функция. Определенная ограниченность такого подхода преодолевается в настоящей работе, где (по крайней мере на шкале $L_p$-пространств) вводится гораздо более широкий класс экстраполяционных функторов, тесно связанный с вещественным методом интерполяции. Благодаря этому в качестве предельных пространств этой шкалы мы получаем "почти все” симметричные (или перестановочно инвариантные) пространства, “близкие” к $L_\infty$ и $L_1$. Ключевыми здесь являются доказанные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов в парах $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$ и $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ соответственно.

Попутно для норм пространств указанного класса найдены новые достаточно простые эквивалентные выражения, использующие лишь $L_p$-нормы функции. Их следствием является целая “серия” экстраполяционных утверждений типа теоремы Яно.

В дальнейшем будут рассматриваться пространства функций, определенных на $[0,1]$. Обобщения и усиления теоремы Яно в случае функций, заданных на пространстве с $\sigma$-конечной мерой, можно найти в работах [6], [7].

Изложим здесь же, во введении, соображения и факты, приводящие к мысли о существовании эквивалентного выражения для $\mathscr{K}$-функционала пары пространств $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^2)$, зависящего только от $L_p$-норм соответствующей функции.

В 1923 году А. Я. Хинчин [8] доказал следующие ставшие классическими неравенства:

$$A_p\biggl(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\biggr\|_{L_p[0,1]} \leqslant B_p\biggl(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2\biggr)^{1/2}, \tag{1}$$

где $r_k$ $(k=1,2,\dots)$ – функции Радемахера на отрезке $[0,1]$, т.е.

$$r_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^{k-1}\pi t) \qquad (t\in[0,1]),$$

$a_k\in\mathbb{R}$, а $A_p$ и $B_p$ – константы, зависящие только от $p\in[1,\infty)$. Эти неравенства явились исходным пунктом для множества исследований, они многократно обобщались и уточнялись. Для нас важно отметить, что константа $B_p$ в правой части (1) стремится к бесконечности при $p\to\infty$. Точнее, $B_p\asymp\sqrt{p}$ при $p\to\infty$, т.е. для всех $p\geqslant 1$

$$C^{-1}\sqrt{p} \leqslant B_p \leqslant C\sqrt{p}$$

с некоторой константой $C>0$.

В 1993 году П. Хитченко [9] доказал неравенства, аналогичные (1), но имеющие одно существенное преимущество: константы в них не зависят от $p$. При этом $l_2$-норму последовательности коэффициентов $a=(a_k)_{k=1}^\infty$ нужно заменить ее $\mathscr{K}$-функционалом $\mathscr{K}_{1,2}(t,a) = \mathscr{K}(t,a;l_1,l_2)$ в паре пространств $(l_1,l_2)$. Приведем точную формулировку: существует константа $c>0$ такая, что при всех $p\geqslant 1$ и $a=(a_k)_{k=1}^\infty\in l_2$

$$c\mathscr{K}_{1,2}(\sqrt{p}, a) \leqslant \biggl\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\biggr\|_p \leqslant \mathscr{K}_{1,2}(\sqrt{p}, a). \tag{2}$$

Здесь, как и всюду далее, $\|f\|_p = \|f\|_{L_p[0,1]}$.

Позднее автором настоящей работы было показано [10], [11], что

$$C_1^{-1}\mathscr{K}_{1,2}(t,a) \leqslant \mathscr{K}\biggl(t, \sum_{k=1}^\infty a_k r_k; L_\infty, \operatorname{Exp} L^2\biggr) \leqslant C_1\mathscr{K}_{1,2}(t,a), \tag{3}$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$. Из соотношений (2) и (3) следует, что с некоторым $C > 0$ для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $p \geqslant 1$

$$C^{-1}\bigg\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\bigg\|_p \leqslant \mathscr{K}\bigg(\sqrt{p}\,,\sum_{k=1}^\infty a_k r_k; L_\infty, \operatorname{Exp} L^2\bigg) \leqslant C\bigg\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\bigg\|_p.$$

Если в последнее соотношение вместо суммы Радемахера подставить произвольную измеримую функцию $f$, то его правая часть перестает быть верной (см. замечание 1). Тем не менее если $\|f\|_p$ заменить некоторой более регулярной величиной относительно $p$, то мы получим верные неравенства:

$$C^{-1}\sqrt{p}\sup_{q\geqslant p}\frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}} \leqslant \mathscr{K}(\sqrt{p}\,, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^2) \leqslant C\sqrt{p}\sup_{q\geqslant p}\frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}}\,.$$

Доказательство несколько более общих неравенств (для $\mathscr{K}(p, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$) составляет основное содержание §2 работы (в §1 приводятся необходимые в дальнейшем определения и обозначения). На их основе в §3 с помощью вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции для норм симметричных пространств, “близких” к $L_\infty$, найдены эквивалентные выражения, использующие лишь $L_p$-нормы функций (точнее, их асимптотику при $p \to \infty$). Наконец, в §4 получены двойственные результаты о $\mathscr{J}$-функционале в паре $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ и пространствах, “близких” к другому “концу” шкалы симметричных пространств – пространству $L_1$.

## §1. Определения, обозначения, вспомогательные факты

Подробное изложение теории симметричных функциональных пространств и теории интерполяции операторов можно найти, например, в монографиях [12]–[15].

Большую роль в различных вопросах анализа играют пространства Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ и $\operatorname{Exp} L^\beta$ (см., например, [16]). Они состоят из всех измеримых функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, для которых конечны квазинормы

$$\|f\|_{L(\log L)^\alpha} = \int_0^1 \log_2^\alpha\bigg(\frac{2}{t}\bigg) f^*(t)\,dt \quad \text{и} \quad \|f\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} = \sup_{0<t\leqslant 1} \log_2^{-1/\beta}\bigg(\frac{2}{t}\bigg) f^*(t)$$

соответственно. Здесь $\alpha, \beta > 0$, а $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(t)|$ [14; гл. 2, §2]. В каждом из этих пространств можно ввести норму так, что оно становится симметричным (или перестановочно инвариантным).

Напомним, что банахово пространство $X$ измеримых функций, определенных на $[0,1]$, называется *симметричным*, если выполнены следующие условия:

а) если $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \leqslant |y(t)|$, то $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \leqslant \|y\|$;

б) если $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) = y^*(t)$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Важный и наиболее простой пример симметричных пространств – $L_p$-пространства ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \bigg(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p} \quad \text{для} \quad p < \infty$$

и

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \quad \text{для} \quad p = \infty.$$

Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть $N(t)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $N(0)=0$. Пространство Орлича $L_N$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x=x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{L_N}=\inf\left\{u>0:\int_0^1 N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right)dt\leqslant 1\right\}$$

конечна. В частности, если $N(t)=t^p$ $(1\leqslant p<\infty)$, мы получаем $L_p$-пространства.

Другие примеры симметричных пространств – пространства Лоренца и Марцинкевича. Если $\varphi(t)$ – вогнутая возрастающая функция на $[0,1]$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x=x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)}=\sup_{0<t\leqslant 1}\left(\varphi^{-1}(t)\int_0^t x^*(s)\,ds\right)<\infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ $(1\leqslant p<\infty)$ – из всех $x=x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)}=\left(\int_0^1 (x^*(s))^p\,d\varphi(s)\right)^{1/p}<\infty.$$

Заметим, что на пространстве $\operatorname{Exp}L^\beta$ можно ввести эквивалентные нормы так, чтобы оно стало пространством Орлича и Марцинкевича: оно совпадает с пространством $L_{N_\beta}$, где $N_\beta(t)=e^{t^\beta}-1$, если $\beta\geqslant 1$, и $N_\beta(t)=\exp(t+t_\beta^{1/\beta})^\beta-\exp t_\beta$, $t_\beta=1/\beta-1$, если $0<\beta<1$, а также с пространством $M(\varphi_\beta)$, где $\varphi_\beta(t)=t\log_2^{1/\beta}(e^{\frac{1+\beta}{\beta}}/t)$ (см. [17], [18], а также [14; теорема 5.3]). Аналогично, пространство $L(\log L)^\alpha$ является одновременно пространством Орлича $L_{M_\alpha}$, где $M_\alpha(t)$ эквивалентна в бесконечности функции $t\log_2^\alpha t$, и пространством Лоренца $\Lambda_1(\varphi_{1/\alpha})$ [18]. Отсюда, в частности, ввиду двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича [14; теорема 5.2] следует, что $(L(\log L)^\alpha)^*=\operatorname{Exp}L^{1/\alpha}$ и $L(\log L)^\alpha$ является подпространством в $(\operatorname{Exp}L^{1/\alpha})^*$ (квазинормы эквивалентны).

Если $(X_0,X_1)$ – банахова пара (т.е. $X_0$ и $X_1$ линейно и непрерывно вложены в некоторое отделимое линейное топологическое пространство), то естественным образом определяются пересечение $X_0\cap X_1$ и сумма $X_0+X_1$ с нормами

$$\|x\|=\max_{i=0,1}\|x\|_{X_i}\quad\text{и}\quad \|x\|=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}: x=x_0+x_1,\ x_i\in X_i,\ i=0,1\}$$

соответственно.

Пусть $(X_0,X_1)$ и $(Y_0,Y_1)$ – банаховы пары. Тройка пространств $(X_0,X_1,X)$, $X_0\cap X_1\subset X\subset X_0+X_1$, называется *интерполяционной* относительно тройки $(Y_0,Y_1,Y)$, $Y_0\cap Y_1\subset Y\subset Y_0+Y_1$, если любой линейный оператор $T$, определенный на $X_0+X_1$ и ограниченный из $X_0$ в $Y_0$ и из $X_1$ в $Y_1$, ограничен из $X$ в $Y$. Если $X_i=Y_i$ $(i=0,1)$ и $X=Y$, то говорят, что $X$ – *интерполяционное пространство* относительно пары $(X_0,X_1)$.

Важным способом получения интерполяционных пространств является вещественный метод интерполяции, основанный на применении $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов Петре:

$$\mathscr{K}(t,x;X_0,X_1)=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1}: x=x_0+x_1,\ x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\}$$

и

$$\mathscr{J}(t,x;X_0,X_1)=\max\{\|x\|_{X_0},\ t\|x\|_{X_1}\}.$$

При фиксированном $t>0$ первый из них является нормой на сумме пространств $X_0+tX_1$, второй – на пересечении $X_0\cap tX_1$ (если $X$ – банахово пространство, а $a>0$, то по составу элементов $aX$ – то же пространство $X$, но с нормой $\|x\|_{aX}=a\|x\|_X$). Если же зафиксировать $x\in X_0+X_1$ (соответственно $x\in X_0\cap X_1$), то $\mathscr{K}(t,x;X_0,X_1)$ (соответственно $\mathscr{J}(t,x;X_0,X_1)$) – возрастающая вогнутая функция относительно переменной $t$.

Напомним одно хорошо известное утверждение о двойственности $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов [12; § 3.7]. Пусть $(X_0,X_1)$ – банахова пара такая, что $X_0\cap X_1$ всюду плотно в $X_0$ и $X_1$. Тогда если сумму $X_0+X_1$ рассматривать с нормой $\mathscr{K}(t,x;X_0,X_1)$ $(t>0)$, то сопряженное к ней пространство изометрически совпадает с пересечением $X_0^*\cap X_1^*$, рассматриваемым с нормой $\mathscr{J}(t^{-1},x^*;X_0^*,X_1^*)$. Используя это обстоятельство, уже упоминавшуюся здесь двойственность пространств Лоренца и Марцинкевича, а также формулу для $\mathscr{J}$-функционала на соответствующей паре пространств Лоренца [14; теорема 5.10], нетрудно получить следующее выражение для $\mathscr{K}$-функционала на паре пространств Марцинкевича:

$$\mathscr{K}(t,x;M(\psi),M(\varphi))\asymp\sup_{0<u\leqslant 1}[\max(\psi(u),t^{-1}\varphi(u))]^{-1}\int_0^u x^*(s)\,ds \tag{4}$$

с константами, не зависящими от $x\in M(\psi)+M(\varphi)$ и $t>0$ (см. также [19]). Здесь и всюду далее выражение вида $F_1\asymp F_2$ означает, что для некоторых $c>0$ и $C>0$ $cF_1\leqslant F_2\leqslant CF_1$, причем константы $c$ и $C$, как правило, не зависят от всех или части аргументов $F_1$ и $F_2$.

Пусть $E$ – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей $a=(a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Если $(X_0,X_1)$ – произвольная банахова пара, то пространство $\mathscr{K}$-метода $(X_0,X_1)_E^{\mathscr{K}}$ состоит из всех $x\in X_0+X_1$, для которых

$$\|x\|=\|(\mathscr{K}(2^j,x;X_0,X_1))_j\|_E<\infty.$$

В пространство $\mathscr{J}$-метода $(X_0,X_1)_E^{\mathscr{J}}$ входят все $x\in X_0+X_1$, допускающие представление

$$x=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j \quad (\text{сходимость в}\quad X_0+X_1), \tag{5}$$

где $u_j\in X_0\cap X_1$. Норма в $(X_0,X_1)_E^{\mathscr{J}}$ полагается равной

$$\inf_{\{u_j\}}\|(\mathscr{J}(2^j,u_j;X_0,X_1))_j\|_E,$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, для которых выполнено соотношение (5).

Если $E$ – банахова решетка двусторонних последовательностей и $\alpha=(\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел, то пространство $E(\alpha_k)$ состоит из всех $a=(a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $(a_k\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}\in E$ и $\|a\|_{E(\alpha_k)}=\|(a_k\alpha_k)\|_E$. Предположим, что $E\supset\Delta(\vec{l}_\infty)=l_\infty\cap l_\infty(2^{-k})$ (соответственно $\{0\}\ne E\subset\Sigma(\vec{l}_1)=l_1+l_1(2^{-k})$). Тогда отображение $(X_0,X_1)\mapsto(X_0,X_1)_E^{\mathscr{K}}$ (соответственно $(X_0,X_1)\mapsto(X_0,X_1)_E^{\mathscr{J}}$) определяет интерполяционный функтор. Это означает, что для произвольных банаховых пар $(X_0,X_1)$ и $(Y_0,Y_1)$ тройка $(X_0,X_1,(X_0,X_1)_E^{\mathscr{K}})$ является интерполяционной относительно тройки $(Y_0,Y_1,(Y_0,Y_1)_E^{\mathscr{K}})$ (и аналогично для

$\mathscr{J}$-метода). Совокупность всех таких функторов называется *вещественным* $\mathscr{K}$- (соответственно $\mathscr{J}$-) *методом интерполяции*. Важно отметить, что в случае $\mathscr{K}$- (соответственно $\mathscr{J}$-) метода его параметр $E$ можно всегда считать интерполяционным пространством относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ (соответственно $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$) [13; следствия 3.3.10 и 3.4.6].

В частности, для $0<\theta<1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ получаем классические интерполяционные пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_0, X_1)^{\mathscr{K}}_{l_p(2^{-k\theta})} = (X_0, X_1)^{\mathscr{J}}_{l_p(2^{-k\theta})},$$

свойства которых подробно изучаются в монографии [12].

## § 2. О $\mathscr{K}$-функционале пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$

Лемма 1. *Для произвольного $\beta > 0$ выполнено*

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp t \sup_{0<u\leqslant \min(1, 2^{1-t^\beta})} \left( f^*(u) \log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)\right)$$

*с константами, не зависящими от $f \in \operatorname{Exp} L^\beta$ и $t>0$.*

Доказательство. Из соотношения (4) и из того, что $L_\infty = M(\varphi_0)$, $\varphi_0(u) = u$, а $\operatorname{Exp} L^\beta = M(\varphi_\beta)$, $\varphi_\beta(u) = t \log_2^{1/\beta}(e^{\frac{1+\beta}{\beta}}/u)$ (см. § 1), следует:

$$\begin{gathered} \mathscr{K}(t, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp \|f\|_{M(\psi_t)}, \\ \text{где} \quad \psi_t(u) = u \max\left\{1, t^{-1} \log_2^{1/\beta}\left(\frac{e^{(1+\beta)/\beta}}{u}\right)\right\}, \end{gathered} \tag{6}$$

с константами, зависящими только от $\beta > 0$.

Пусть $\mathscr{M}_\psi(s)$ – функция растяжения функции $\psi$, т.е.

$$\mathscr{M}_\psi(s) = \sup_{0<u\leqslant \min(1,1/s)} \frac{\psi(su)}{\psi(u)}.$$

Если $\chi_\beta(u) = \log_2^{1/\beta}(e^{(1+\beta)/\beta}/u)$, то прямые вычисления показывают, что

$$\mathscr{M}_{\chi_\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\beta \ln 2}{\beta+1} + 1\right)^{1/\beta} < 2. \tag{7}$$

Оценим $\mathscr{M}_{\psi_t}(1/2)$, используя равенство

$$\mathscr{M}_{\psi_t}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sup_{0<u\leqslant 1} F_t(u), \quad \text{где} \quad F_t(u) = \frac{\max(1, t^{-1}\chi_\beta(u/2))}{\max(1, t^{-1}\chi_\beta(u))}. \tag{8}$$

Рассмотрим три случая:

a) $\chi_\beta(u) \geqslant t$, тогда

$$F_t(u) = \frac{\chi_\beta(u/2)}{\chi_\beta(u)} \leqslant \mathscr{M}_{\chi_\beta}\left(\frac{1}{2}\right);$$

b) $\chi_\beta(u) < t \leqslant \chi_\beta(u/2)$, в этом случае снова

$$F_t(u) = \frac{\chi_\beta(u/2)}{t} \leqslant \frac{\chi_\beta(u/2)}{\chi_\beta(u)} \leqslant \mathscr{M}_{\chi_\beta}\left(\frac{1}{2}\right);$$

c) $\chi_\beta(u/2) < t$, тогда получаем $F_t(u) = 1 \leqslant \mathscr{M}_{\chi_\beta}(1/2)$.

В итоге ввиду (7) и (8) $\sup_{t>0} \mathscr{M}_{\psi_t}(1/2) \leqslant 2^{-1}\mathscr{M}_{\chi_\beta}(1/2) < 1$. Поэтому, действуя точно так же, как при доказательстве леммы 1.4 в [14], получаем, что при всех $0 < s \leqslant 1$

$$\int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u}\,du \leqslant C\psi_t(s),$$

где константа $C > 0$ зависит только от $\beta$. Отсюда по определению нормы в пространстве Марцинкевича

$$\begin{aligned}\|f\|_{M(\psi_t)} &\leqslant \sup_{0<s\leqslant 1} \frac{1}{\psi_t(s)} \int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u}\,du \sup_{0<u\leqslant 1}\left\{f^*(u)\frac{u}{\psi_t(u)}\right\} \\ &\leqslant C \sup_{0<u\leqslant 1}\left\{f^*(u)\frac{u}{\psi_t(u)}\right\}.\end{aligned}$$

Так как противоположное неравенство

$$\|f\|_{M(\psi_t)} \geqslant \sup_{0<u\leqslant 1}\left\{f^*(u)\frac{u}{\psi_t(u)}\right\}$$

очевидно, то из (6) следует:

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(t, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) &\asymp \sup_{0<u\leqslant 1}\left\{f^*(u)\frac{u}{\psi_t(u)}\right\} \\ &\asymp \sup_{0<u\leqslant 1}\left\{f^*(u)\min\left(1, t\log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)\right)\right\} \\ &= t \sup_{0<u\leqslant \min(1, 2^{1-t^\beta})}\left(f^*(u)\log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)\right)\end{aligned}$$

с константами, зависящими только от $\beta$.

Теорема 1. *Для произвольного* $\beta > 0$

$$\mathscr{K}(p, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp p \sup_{q\geqslant p} \frac{\|f\|_{q^\beta}}{q} \tag{9}$$

*с константами, не зависящими от* $f \in \operatorname{Exp} L^\beta$ *и* $p \geqslant 1$.

Доказательство. Обозначим $k_\beta = \max(1, 2/\beta)$. Тогда для любого $q \geqslant 1$

$$\|f\|_q = \left(\int_0^1 (f^*(s))^q\,ds\right)^{1/q} \leqslant \left(2^{k_\beta q-1}\int_0^{2^{1-k_\beta q}} (f^*(s))^q\,ds\right)^{1/q}$$
$$\leqslant 2^{k_\beta}\left(\int_0^{2^{1-k_\beta q}} \log_2^{q/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)du\right)^{1/q} \sup_{0<u\leqslant 2^{1-q}}\left(f^*(u)\log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)\right). \tag{10}$$

Оценим сверху интеграл

$$I(\beta, q) = \int_0^{2^{1-k_\beta q}} \log_2^{q/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)du.$$

С помощью замены переменной получим:

$$I(\beta, q) = \frac{2\beta\ln 2}{q}\int_{(k_\beta q)^{q/\beta}}^{\infty} x^{\beta/q}2^{-x^{\beta/q}}\,dx = 2\ln 2 I_1(\beta, q), \tag{11}$$

где $I_1(\beta, q) = \displaystyle\int_{k_\beta q}^{\infty} v^{q/\beta}2^{-v}\,dv$. Интегрируя по частям, оценим $I_1(\beta, q)$:

$$I_1(\beta, q) = \frac{1}{\ln 2}\left((k_\beta q)^{q/\beta}2^{-k_\beta q} + \frac{q}{\beta}\int_{k_\beta q}^{\infty} v^{q/\beta-1}2^{-v}\,dv\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\ln 2}\left[(k_\beta q)^{q/\beta}2^{-k_\beta q} + \frac{1}{\beta k_\beta}I_1(\beta, q)\right] \leqslant \frac{1}{\ln 2}\left[(k_\beta q)^{q/\beta}2^{-k_\beta q} + \frac{1}{2}I_1(\beta, q)\right],$$

так как $\beta k_\beta \geqslant 2$. Отсюда

$$I_1(\beta, q) \leqslant \frac{2}{2\ln 2 - 1}(k_\beta q)^{q/\beta}2^{-k_\beta q}.$$

Поэтому из (11) следует

$$I(\beta, q) \leqslant \frac{4\ln 2}{2\ln 2 - 1}(k_\beta q)^{q/\beta}2^{-k_\beta q},$$

и, значит, ввиду (10) существует $C(\beta) > 0$ такое, что при всех $q \geqslant 1$

$$\|f\|_q \leqslant C(\beta)q^{1/\beta}\sup_{0<u\leqslant 2^{1-q}}\left(f^*(u)\log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right)\right).$$

Но тогда по лемме 1

$$\|f\|_q \leqslant C(\beta)\mathscr{K}(q^{1/\beta}, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$$

с некоторой (возможно, другой) константой $C(\beta) > 0$, не зависящей от $f$ и $q \geqslant 1$.

Если теперь $q \geqslant p$, то из последнего неравенства и вогнутости $\mathscr{K}$-функционала следует

$$\frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leqslant C(\beta)\frac{\mathscr{K}(q^{1/\beta}, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)}{q^{1/\beta}} \leqslant C(\beta)\frac{\mathscr{K}(p^{1/\beta}, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)}{p^{1/\beta}}.$$

Отсюда

$$p^{1/\beta} \sup_{q \geqslant p} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leqslant C(\beta)\mathscr{K}(p^{1/\beta}, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$$

или после замены переменной

$$p \sup_{q \geqslant p} \frac{\|f\|_{q^\beta}}{q} \leqslant C(\beta)\mathscr{K}(p, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta).$$

Для доказательства противоположного неравенства ввиду леммы 1 достаточно показать, что при всех $0 < u \leqslant 2^{1-p}$ $(p \geqslant 1)$ выполнено:

$$f^*(u) \leqslant C_1(\beta) \sup_{q \geqslant p} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \log_2^{1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right), \tag{12}$$

где $C_1(\beta)$ зависит только от $\beta$.

Из описания пространства $\operatorname{Exp} L^\beta$ как пространства Орлича (см. § 1), а также из разложения функции $N_\beta(t) = e^{t^\beta} - 1$ в ряд Тейлора следует, что

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} \asymp \sup_{q \geqslant 1} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}}\,.$$

Отсюда

$$f^*(u) \leqslant C_2(\beta) \sup_{q \geqslant 1} \frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \log_2^{1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right) \quad \text{при} \quad 0 < u \leqslant 1. \tag{13}$$

Заметим, что при доказательстве (12) можно предполагать: $f = f^*$ и $\{s \in [0,1] : f(s) \neq 0\} \subset [0, 2^{1-p}]$. Поэтому если $1 \leqslant q \leqslant p$, то по неравенству Гёльдера

$$\|f\|_q \leqslant 2^{\frac{(1-p)(p-q)}{pq}} \|f\|_p \leqslant 2^{-\frac{p}{q}} \|f\|_p. \tag{14}$$

Так как для $x \geqslant 1$ $x^{1/\beta} \leqslant C_3(\beta) 2^x$, то из (14) получаем, что при $1 \leqslant q \leqslant p$

$$\frac{\|f\|_q}{q^{1/\beta}} \leqslant 2 \max_{1 \leqslant q \leqslant p} \frac{2^{-p/q} p^{1/\beta}}{q^{1/\beta}} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}} \leqslant 2C_3(\beta) \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}}\,.$$

Отсюда и из (13) следует (12).

Замечание 1. В соотношении (9) правую часть нельзя заменить на $\|f\|_{p^\beta}$. Действительно, рассмотрим функции $h_u(t) = 1$, если $t \in [0,u]$, и $h_u(t) = 0$, если $t \notin [0,u]$ $(0 < u \leqslant 2^{1-p})$. Тогда $\|h_u\|_p = u^{1/p}$ и по лемме 1

$$\mathscr{K}(p^{1/\beta}, h_u; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp p^{1/\beta} \log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right).$$

Поэтому

$$\sup_{0<u\leqslant 2^{1-p}} \frac{\mathscr{K}(p^{1/\beta}, h_u; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)}{\|h_u\|_p} \asymp p^{1/\beta} \sup_{0<u\leqslant 2^{1-p}} \log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{u}\right) u^{-1/p} = \infty.$$

Теорема 1 позволяет найти новое описание пространств, интерполяционных относительно банаховой пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$.

## § 3. Описание симметричных пространств, "близких" к $L_\infty$

Далее через $e^k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ будут обозначаться стандартные орты в пространстве двусторонних числовых последовательностей, т.е. $e^k = (e^k_j)$, $e^k_k = 1$, $e^k_j = 0$ $(j \neq k)$.

Определение 1. Пусть банахова решетка $F$ промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, что означает выполнение непрерывных вложений

$$\Delta(\vec{l}_\infty) \subset F \subset \Sigma(\vec{l}_\infty). \tag{15}$$

Обозначим через $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F}$ множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $f$ таких, что последовательность

$$a_f = \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|_{2^{\beta k}} e^k$$

принадлежит $F$.

Из определения ясно, что $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F}$ – симметричное пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F}} = \|a_f\|_F.$$

В частности, $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,l_\infty} = L_\infty$, а $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,l_\infty(2^{-k})} = \operatorname{Exp} L^\beta$ (последнее следует из разложения функции $N_\beta(u) = e^{u^\beta} - 1$ в ряд Тейлора). Поэтому

$$L_\infty \subset \mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F} \subset \operatorname{Exp} L^\beta.$$

Более того, из теоремы 2, основного результата этого параграфа, будет следовать, что пространство $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F}$ интерполяционно относительно пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$ при условии, что решетка $F$ интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty$.

Начнем со вспомогательного утверждения. Определим проекторы в пространствах двусторонних числовых последовательностей:

$$P_+ a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^j \quad \text{и} \quad P_- a = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j e^j, \quad \text{где} \quad a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Лемма 2. *Предположим, что для банаховой решетки двусторонних числовых последовательностей $F$ выполнено* (15).

*Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой последовательности $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $|a_j| \leqslant 2^j |a_0|$ $(j = -1, -2, \dots)$, справедливо неравенство*

$$\|a\|_F \leqslant C \|P_+ a\|_F.$$

Доказательство. Так как $a = P_- a + P_+ a$, то

$$\|a\|_F \leqslant \|P_- a\|_F + \|P_+ a\|_F. \tag{16}$$

Ввиду условий леммы

$$\|P_- a\|_F \leqslant |a_0| \left\| \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^j e^j \right\|_F \leqslant C_1 |a_0| \left\| \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^j e^j \right\|_{\Delta(\vec{l}_\infty)} = C_1 |a_0|,$$

а также

$$\|P_+ a\|_F \geqslant |a_0| \, \|e^0\|_F \geqslant |a_0| C_2^{-1} \|e^0\|_{\Sigma(\vec{l}_\infty)} = C_2^{-1} |a_0|,$$

где $C_1$ и $C_2$ – константы вложений (15). Отсюда и из (16) следует

$$\|a\|_F \leqslant (1 + C_1 C_2) \|P_+ a\|_F,$$

и лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\beta > 0$ и банахова решетка $F$ интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$. Тогда $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,F} = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)^{\mathscr{K}}_F$ (с эквивалентностью норм).*

Доказательство. Достаточно показать, что с некоторыми константами, зависящими лишь от банаховой решетки $F$, для произвольной измеримой на $[0,1]$ функции $f$ выполнено:

$$\|a_f\|_F \asymp \|b_f\|_F, \tag{17}$$

где

$$a_f = \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|_{2^{\beta k}} e^k \quad \text{и} \quad b_f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathscr{K}(2^k, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) e^k.$$

Прежде всего, так как $L_\infty \subset \operatorname{Exp} L^\beta$ с константой 1, то при $k = -1, -2, \dots$ $(b_f)_k = 2^k (b_f)_0 = 2^k \|f\|_{\operatorname{Exp} L^\beta}$. Поэтому по лемме 2

$$\|b_f\|_F \asymp \|P_+ b_f\|_F. \tag{18}$$

Далее, хорошо известно [13; замечание 3.3.8], что при условии интерполяционности $F$ относительно пары $\vec{l}_\infty$

$$\|a\|_F \asymp \|\overline{a}\|_F, \quad \text{где} \quad \overline{a} = (\overline{a}_k)_{k=-\infty}^{\infty}, \qquad \overline{a}_k = \sup_{j=0,\pm1,\dots} \{\min[1, 2^{k-j}] \, |a_j|\}.$$

Следовательно,

$$\|a_f\|_F \asymp \|\overline{a}_f\|_F,$$

откуда ввиду очевидных неравенств $\overline{a}_f \geqslant P_+ \overline{a}_f \geqslant a_f$

$$\|a_f\|_F \asymp \|P_+ \overline{a}_f\|_F. \tag{19}$$

Так как последовательность $a_f$ возрастает, то

$$P_+ \overline{a}_f = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sup_{j \geqslant k} \frac{\|f\|_{2^{\beta j}}}{2^j} e^k$$

и, значит, по теореме 1

$$\|P_+ \overline{a}_f\|_F \asymp \|P_+ b_f\|_F$$

с универсальными константами. Поэтому соотношение (17) следует из (18) и (19).

Замечание 2. Сохраняя обозначения теоремы 2, покажем, что вложение $X \subset \mathscr{L}_{\beta,F}^{\mathscr{K}}$ можно доказать и иначе, используя интерполяционные соображения. Действительно, пусть $T$ – произвольный линейный оператор, ограниченный в каждом из пространств $L_\infty$ и $\operatorname{Exp} L^\beta$. Тогда сублинейный оператор

$$Qf = \sum_{k=0}^{\infty} \|Tf\|_{2^{\beta k}} e^k$$

ограниченно действует из $L_\infty$ в $l_\infty$ и из $\operatorname{Exp} L^\beta$ в $l_\infty(2^{-k})$. Так как функторы вещественного метода интерполируют сублинейные операторы и $F = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))_F^{\mathscr{K}}$ [13; лемма 3.3.7], то $Q$ ограниченно действует из $X = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)_F^{\mathscr{K}}$ в $F$, т.е. в наших обозначениях

$$\|Tf\|_{\mathscr{L}_{\beta,F}^{\mathscr{K}}} = \|a_f\|_F \leqslant C\|f\|_X.$$

Таким образом, тройка пространств $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta, X)$ интерполяционна относительно тройки $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta, \mathscr{L}_{\beta,F}^{\mathscr{K}})$. Если, в частности, в качестве $T$ взять тождественный оператор, то получим $X \subset \mathscr{L}_{\beta,F}^{\mathscr{K}}$.

Интерполяция в паре $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$ описывается вещественным $\mathscr{K}$-методом [19] (см. также [10; предложение 1]). Это означает, что всякое пространство $X$, интерполяционное относительно нее, представимо в виде $X = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)_F^{\mathscr{K}}$, где $F$ – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей. При этом, как говорилось в § 1, можно считать, что $F$ интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$. Поэтому мы получаем из теоремы 2

Следствие 1. *Пусть $\beta > 0$. Для любого пространства $X$, интерполяционного относительно пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$, существует банахова решетка $F$ такая, что $X = \mathscr{L}_{\beta,F}^{\mathscr{K}}$ (с эквивалентностью норм).*

Замечание 3. Отметим, что в последнее время многие авторы при изучении функциональных пространств, "близких" к $L_\infty$, использовали асимптотику $L_p$-норм функции при $p \to \infty$. Так, например, в [20] изучается сходимость рядов Уолша в пространствах $G_{p,\alpha}$ $(p > 1,\ \alpha \geqslant 1)$, одна из эквивалентных норм которых имеет вид:

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left( \int_1^\infty \left( \frac{\|f\|_x}{x^\alpha} \right)^p dx \right)^{1/p}.$$

В работе [20], в частности, выясняется расположение этих пространств в шкале экспоненциальных пространств Орлича. А именно показано, что для $p > 1$, $q > 0$, $\alpha \geqslant 1$ таких, что $p^{-1} + q^{-1} = \alpha$, и любого $r > q$

$$L_{N_r} \subset G_{p,\alpha} \subset L_{N_q},$$

где, как и ранее, $N_r(t) = e^{t^r} - 1$ $(r \geqslant 1)$ и $N_r(t) = \exp(t + t_r^{1/r})^r - \exp t_r$, $t_r = 1/r - 1$ $(0 < r < 1)$.

Используя теорему 2 и результаты работы [10], нетрудно показать, что пространства $G_{p,\alpha}$ являются пространствами Лоренца. Действительно, для заданных $p > 1$ и $\alpha \geqslant 1$ возьмем любое $\beta \in (0, p/(\alpha p - 1))$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $G_{p,\alpha} = \mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\beta,l_p(2^{-\theta k})}$, где $\theta = \beta(\alpha p-1)/p \in (0,1)$. Так как пространство $l_p(2^{-\theta k})$ интерполяционно относительно пары $\vec{l}_\infty$ [12; теорема 5.6.1], то по теореме 2

$$G_{p,\alpha} = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)^{\mathscr{K}}_{l_p(2^{-\theta k})}.$$

Но последнее пространство (см. [10; пример 2]) совпадает (с эквивалентностью норм) с пространством Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, где $\varphi(s) = \log_2^{1-\alpha p}(2/s)$.

Из теоремы 2 можно вывести целую "серию" утверждений типа теоремы Яно. Пользуясь последним замечанием, приведем в качестве примера одно из них.

Теорема 3. *Пусть линейный оператор $T$ ограничен в пространстве $L_p$ для каждого $p \geqslant 1$ и*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\|T\|_{L_x\to L_x}}{x^\alpha}\right)^q dx < \infty$$

*для некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $q > 1$.*

*Тогда $T$ ограниченно действует из $L_\infty$ в пространство Лоренца $\Lambda_q(\varphi)$, где $\varphi(s) = \log_2^{1-\alpha q}(2/s)$.*

Доказательство. Ввиду замечания 3 и условий теоремы

$$\|Tf\|_{\Lambda_q(\varphi)} \asymp \left\{\int_1^\infty \left(\frac{\|Tf\|_x}{x^\alpha}\right)^q dx\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\int_1^\infty \left(\frac{\|T\|_{L_x\to L_x}}{x^\alpha}\right)^q dx\right\}^{1/q} \sup_{x\geqslant 1}\|f\|_x = C\|f\|_\infty.$$

В последней части работы мы докажем двойственные результаты о симметричных пространствах, "близких" к $L_1$. При этом ключевую роль будет играть $\mathscr{J}$-метод вещественной интерполяции.

## § 4. Описание симметричных пространств, "близких" к $L_1$

Напомним определение пересечения и суммы счетного семейства банаховых пространств. Пусть $X_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ – банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в линейное топологическое пространство $\mathscr{T}$. Тогда их пересечением называют банахово пространство $\Delta_{k=1}^\infty X_k$, состоящее из всех $x \in \bigcap_{k=1}^\infty X_k$, для которых $\|x\| = \sup_{k=1,2,\dots}\|x\|_{X_k} < \infty$. При построении суммы $\sum_{k=1}^\infty X_k$ сделаем дополнительное предположение о том, что существует банахово пространство $X_0$, вложенное в $\mathscr{T}$ и такое, что $X_k \subset X_0$ с константой 1 для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда через $\sum_{k=1}^\infty X_k$ обозначим множество всех $x \in X_0$, представимых в виде

$$x = \sum_{k=1}^\infty x_k \quad (x_k \in X_k), \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k} < \infty. \tag{20}$$

Если теперь на линейном пространстве $\sum_{k=1}^\infty X_k$ ввести норму

$$\|x\| = \inf \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (20), то оно становится банаховым.

Лемма 3. *Если пересечение* $\Delta_{k=1}^{\infty} X_k$ *всюду плотно в* $X_k$ *для любого* $k = 1, 2, \dots$, *то сопряженное к нему пространство* $(\Delta_{k=1}^{\infty} X_k)^*$ *совпадает с* $\sum_{k=1}^{\infty} X_k^*$ *(изометрически).*

Так как последнее утверждение, по сути дела, известно (очень близко к нему, например, предложение 2.4.6 из монографии [13]), то доказательство его мы опускаем.

Лемма 4. *Для того чтобы банахова решетка* $G$ *двусторонних числовых последовательностей была интерполяционной относительно пары* $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$, *необходимо и достаточно выполнения следующего условия: существует* $c > 0$ *такое, что из*

$$a \in \Sigma(\vec{l_1}), \quad a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \quad (\text{сходимость в} \quad \Sigma(\vec{l_1})), \quad a^k = (a_i^k) \in \Delta(\vec{l_1})$$

*следует*:

$$\left\| \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \max(1, 2^{k-i}) |a_i^k| \right)_k \right\|_G \geqslant c \|a\|_G. \tag{21}$$

Доказательство. Хорошо известно [13; следствие 3.4.7], что интерполяционность $G$ относительно пары $\vec{l_1}$ эквивалентна выполнению равенства

$$(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathscr{J}} = G. \tag{22}$$

Если выполнено (22), то для доказательства (21) достаточно воспользоваться определением нормы пространства $(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathscr{J}}$, а также тем, что

$$\mathscr{J}(t, b; l_1, l_1(2^{-k})) \asymp \sum_{i=-\infty}^{\infty} \max(1, t2^{-i}) |b_i| \tag{23}$$

с константами, не зависящими от $b = (b_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Delta(\vec{l_1})$ и $t > 0$.

Покажем теперь, что из (21) следует (22). Заметим прежде всего, что вложение

$$(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathscr{J}} \supset G$$

выполнено для любой решетки $G$, промежуточной относительно пары $\vec{l_1}$. Действительно, если $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in G$, то представим: $a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^k$, где $e^k$ – стандартные орты. Тогда $a_k e^k \in \Delta(\vec{l_1})$ и $\mathscr{J}(2^k, a_k e^k; l_1, l_1(2^{-k})) = |a_k|$. Поэтому $\|a\|_{(l_1, l_1(2^{-k}))_G^{\mathscr{J}}} \leqslant \|a\|_G$. В заключение заметим, что ввиду соотношения (23) противоположное вложение в (22) является непосредственным следствием условия (21).

Теорема 4. *Для произвольного* $\beta > 0$ *с константами, не зависящими от* $g \in L(\log L)^{1/\beta}$ *и* $k = 1, 2, \dots$,

$$\mathscr{J}(2^{-k}, g; L_1, L(\log L)^{1/\beta}) \asymp \|g\|_{U_k}, \tag{24}$$

*где* $U_k = \sum_{j \geqslant k} 2^{j-k} L_{r_j}$, $r_j = 1 + 2^{-\beta j}$.

Доказательство. По теореме 1

$$\mathscr{K}(2^k, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp \|f\|_{V_k},$$

где $V_k = \Delta_{j\geqslant k} 2^{k-j} L_{2^{\beta j}}$. При этом константы последней эквивалентности не зависят от $k = 1, 2, \dots$ и $f \in \operatorname{Exp} L^\beta$. Следовательно, переходя к сопряженным пространствам, ввиду двойственности $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов (см. § 1) получаем

$$\mathscr{J}(2^{-k}, g; L_\infty^*, (\operatorname{Exp} L^\beta)^*) \asymp \|g\|_{V_k^*}$$

с константами, не зависящими от $k = 1, 2, \dots$ и $g \in (\operatorname{Exp} L^\beta)^*$. Так как $L(\log L)^{1/\beta}$ и $L_1$ – подпространства пространств $(\operatorname{Exp} L^\beta)^*$ и $L_\infty^*$ соответственно (см. § 1), то отсюда по лемме 3 для всех $g \in L(\log L)^{1/\beta}$

$$\mathscr{J}(2^{-k}, g; L_1, L(\log L)^{1/\beta}) \asymp \|g\|_{U_k'}.$$

В последнем соотношении

$$U_k' = \sum_{j\geqslant k} 2^{j-k} L_{s_j},$$

где $k = 1, 2, \dots$ и $s_j = 1 + 1/(2^{\beta j} - 1)$.

Для любых $\beta > 0$ и $j = 1, 2, \dots$ выполнено:

$$u_\beta s_{j+1} < r_j < s_j, \quad \text{где} \quad u_\beta = \frac{2^{2\beta} - 1}{2^\beta}.$$

Поэтому из определения $U_k$ следует: $U_k' = U_k$ и $\|g\|_{U_k} \leqslant \|g\|_{U_k'} \leqslant u_\beta^{-1} \|g\|_{U_k}$.

Определение 2. Пусть банахова решетка $G$ промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$, что означает выполнение непрерывных вложений

$$\Delta(\vec{l_1}) \subset G \subset \Sigma(\vec{l_1}). \tag{25}$$

Обозначим через $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$ множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $g$ таких, что существует представление

$$g = \sum_{k=1}^\infty g_k \quad (\text{сходимость в} \quad L_1), \qquad g_k \in L_{r_k}, \quad r_k = 1 + 2^{-\beta k}, \tag{26}$$

причем

$$\sum_{k=1}^\infty \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \in G. \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$ – симметричное пространство с нормой

$$\|g\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}} = \inf \left\| \sum_{k=1}^\infty \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (26). Кроме того, $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,l_1} = L_1$ и $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,l_1(2^{-k})} = L(\log L)^{1/\beta}$. Следовательно, для любой банаховой решетки $G$ со свойством (25)

$$L(\log L)^{1/\beta} \subset \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G} \subset L_1.$$

Мы покажем, что, более того, пространство $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$ интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$, если $G$ интерполяционна относительно пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$.

Теорема 5. *Предположим, что $\beta > 0$ и банахова решетка $G$ интерполяционна относительно пары $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$. Тогда $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G} = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})^{\mathscr{J}}_G$ (с эквивалентностью норм).*

Доказательство. Пусть далее $Y = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})^{\mathscr{J}}_G$ и

$$\mathscr{J}(t,h) = \mathscr{J}(t,h; L_1, L(\log L)^{1/\beta})$$

для произвольных $h \in L(\log L)^{1/\beta}$ и $t > 0$.

Прежде всего, по определению пространств $\mathscr{J}$-метода

$$\|f\|_Y = \inf \|(\mathscr{J}(2^k, f_k))_k\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \quad (\text{сходимость в} \quad L_1), \qquad f_k \in L(\log L)^{1/\beta}. \tag{28}$$

Если $g \in \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$, то имеет место представление (26) со свойством (27). Тогда по теореме 4 сразу получаем, что

$$g \in Y \quad \text{и} \quad \|g\|_Y \leqslant C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G.$$

Поэтому $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G} \subset Y$ и $\|g\|_Y \leqslant C_1 \|g\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}}$.

Для доказательства противоположного вложения покажем сначала, что при вычислении нормы в $Y$ можно ограничиться (с точностью до эквивалентности) представлениями (28), в которых $f_k = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$.

Так как пространство $L(\log L)^{1/\beta} \subset L_1$ с константой 1, то для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathscr{J}(2^k, g) = 2^k \|g\|_{L(\log L)^{1/\beta}}.$$

Поэтому если $C_2$ – константа вложения $G \subset \Sigma(\vec{l}_1)$, то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{J}(2^k, f_k) e^k \right\|_G &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} e^k \right\|_G \\ &\geqslant C_2^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} e^k \right\|_{l_1(2^{-k})} = C_2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим теперь вместо заданного представления (28) новое:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'_k, \qquad f'_k = f_k \quad \text{для} \quad k = -2, -3, \dots,$$

$$f'_{-1} = \sum_{i=-1}^{\infty} f_i, \qquad f'_k = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots.$$

Тогда ввиду (29) и в силу того, что $G$ – банахова решетка, получим

$$\begin{aligned}\|(\mathscr{J}(2^k, f_k'))_k\|_G &\leqslant \|(\mathscr{J}(2^k, f_k))_k\|_G + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L(\log L)^{1/\beta}} \|e^{-1}\|_G \\ &\leqslant (1 + 2C_2C_3)\|(\mathscr{J}(2^k, f_k))_k\|_G,\end{aligned}$$

где $C_3$ – константа вложения $\Delta(\vec{l}_1) \subset G$.

Пусть теперь $f \in Y$. Тогда, как показано ранее, существует представление (28) такое, что $f_k = 0$ для $k = 0, 1, \dots$ и

$$\|f\|_Y \geqslant C_4^{-1} \biggl\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, f_{-k}) e^{-k} \biggr\|_G. \tag{30}$$

По теореме 4 для каждого $k = 1, 2, \dots$ можно найти представление

$$f_{-k} = \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,j}, \quad \text{где} \quad g_{k,j} \in L_{r_j}, \tag{31}$$

причем

$$\mathscr{J}(2^{-k}, f_{-k}) \geqslant C_5^{-1} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j}. \tag{32}$$

Опять, так как $G \subset \Sigma(\vec{l}_1)$, из (30) и (32) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \|g_{k,j}\|_{r_j} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j} \leqslant C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, f_{-k}) \\ &\leqslant C_5C_2 \biggl\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, f_{-k}) e^{-k} \biggr\|_G \leqslant C_5C_2C_4 \|f\|_Y < \infty.\end{aligned} \tag{33}$$

Отсюда, в частности, следует, что двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,j}$$

абсолютно сходится в $L_1$ и его сумма равна сумме соответствующего повторного, т.е. $f$. Поэтому

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \quad (\text{сходимость в} \quad L_1), \quad \text{где} \quad g_j = \sum_{k=1}^{j} g_{k,j}.$$

При этом ввиду (31) $g_j \in L_{r_j}$ и

$$\|g_j\|_{r_j} \leqslant \sum_{k=1}^{j} \|g_{k,j}\|_{r_j}. \tag{34}$$

Рассмотрим последовательность

$$b_g = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-j}. \tag{35}$$

Учитывая (33), заключаем, что

$$b_g = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \quad (\text{сходимость в } \Sigma(\vec{l_1})), \quad \text{где} \quad b^k = \sum_{j=k}^{\infty} \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-j}.$$

Из (32) следует, что $b^k \in \Delta(\vec{l_1})$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Значит, по лемме 4 ввиду интерполяционности $G$ относительно пары $\vec{l_1}$

$$\begin{aligned}\|b_g\|_G &\leqslant C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \max(1, 2^{j-k}) \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-k} \right\|_G \\ &= C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j-k} \|g_{k,j}\|_{r_j} e^{-k} \right\|_G.\end{aligned}$$

Поэтому из (34), (35), (30) и (32) получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{r_j} e^{-j} \right\|_G \leqslant \|b_g\|_G \leqslant C_4 C_5 C_6 \|f\|_Y,$$

откуда $f \in \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$ и $\|f\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}} \leqslant C_4 C_5 C_6 \|f\|_Y$.

Интерполяция в паре $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$ описывается вещественным $\mathscr{K}$-методом [21; следствие 5.10] (см. также [22]). Ввиду теорем о связи между $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функторами [13] она описывается также $\mathscr{J}$-методом. Иначе говоря, если $Y$ интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$, то $Y = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})^{\mathscr{J}}_G$ для некоторой банаховой решетки $G$, интерполяционной относительно пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$ (см. § 1). Поэтому из теоремы 5 вытекает

Следствие 2. *Пусть $\beta > 0$. Для любого пространства $Y$, интерполяционного относительно пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)$, существует банахова решетка $G$ такая, что $Y = \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta,G}$ (с эквивалентностью норм).*

Приведем теперь еще одну конкретную экстраполяционную теорему.

Теорема 6. *Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ такие, что при $1 < p < 1 + \varepsilon$ линейный оператор $T$ ограничен в пространстве $L_p$ и $\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant A \log_2(1/(p-1))$. Тогда $T$ можно определить на пространстве Лоренца $\Lambda_1(\varphi)$, построенном по функции $\varphi(t) = t \log_2 \log_2(16/t)$ так, что он будет ограниченно действовать из $\Lambda_1(\varphi)$ в $L_1$.*

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Тогда пространство $\Lambda_1(\varphi)$ интерполяционно относительно пары $(L_1, L(\log L)^{1/\beta})$. Более того, можно доказать следующее равенство, понимаемое как изоморфизм, константа которого зависит от $\beta > 0$:

$$\Lambda_1(\varphi) = (L_1, L(\log L)^{1/\beta})^{\mathscr{J}}_{l_1(w_k)}, \tag{36}$$

где "вес" $w_k = -k$, если $k < 0$, и $w_k = 1$, если $k \geqslant 0$.

Действительно, покажем, что совпадают (с точностью до изоморфизма) соответствующие сопряженные пространства. По теореме двойственности для вещественного метода интерполяции [13]

$$((L_1, L(\log L)^{1/\beta})^{\mathscr{J}}_{l_1(w_k)})^* = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(u_k)},$$

где $u_k = 1/(k+1)$, если $k \geqslant 0$, и $u_k = 1$, если $k < 0$. Так как $(\Lambda_1(\varphi))^* = M(\varphi)$ [14; теорема 5.2], то (36) следует из равенства

$$M(\varphi) = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(u_k)},$$

которое в случае $\beta = 2$ доказано в [10; пример 1]. Случай произвольного $\beta > 0$ рассматривается совершенно аналогично.

Выберем теперь $\beta$ так, чтобы $2^{-\beta} < \varepsilon$. Тогда если $g \in \Lambda_1(\varphi)$, то ввиду (36) и теоремы 5 существует представление

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \quad (\text{сходимость в} \quad L_1), \quad g_k \in L_{r_k}, \qquad r_k = 1 + 2^{-\beta k},$$

такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} k < \infty.$$

По условию теоремы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Tg_k\|_{r_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|_{L_{r_k} \to L_{r_k}} \|g_k\|_{r_k} \leqslant A\beta \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} k.$$

Следовательно,

$$Tg = \sum_{k=1}^{\infty} Tg_k \quad (\text{сходимость в} \quad L_1)$$

и ввиду равенства $L_1 = \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\beta, l_1}$, а также определения 2 $\|Tg\|_1 \leqslant C\|g\|_{\Lambda_1(\varphi)}$ с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от $\beta$.

Замечание 4. Как известно [5; гл. 2], по значениям $F_\theta(X_0, X_1)$ достаточно широкого класса функторов $\{F_\theta\}_{0<\theta<1}$ на паре $(X_0, X_1)$ можно восстановить $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалы этой пары. Теоремы 1 и 4 решают иную задачу: они позволяют (с точностью до эквивалентности) находить аналогичные функционалы для пар предельных пространств $L_p$-шкалы. Как очень частный случай соотношений (9) и (24) можно рассматривать приведенные, например, в [5] равенства (2.26) и (2.27), дающие описание "крайних" экстраполяционных пространств этой шкалы – $\operatorname{Exp} L^\beta$ и $L(\log L)^{1/\beta}$ – в виде пересечения и суммы $L_p$-пространств соответственно.

Замечание 5. Результаты работы естественным образом обобщаются на шкалы пространств, полученных вещественным методом из произвольной банаховой пары $(X_0, X_1)$ такой, что $X_1 \subset X_0$. В частности, можно рассмотреть "экстремальные" шкалы $(X_0, X_1)_{\theta,1}$ и $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ $(0 < \theta < 1)$.

**Список литературы**

1. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. P. 296–305.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
3. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation theory with applications // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. V. 440.
4. *Jawerth B., Milman M.* New results and applications of extrapolation theory // Israel Math. Conf. Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
5. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions: with applications to analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1994. (Lecture Notes in Math. V. 1580).
6. *Carro M. J.* New extrapolation estimates // J. Funct. Anal. 2000. V. 174. P. 155–166.
7. *Carro M. J., Martin J.* On embedding properties of some extrapolation spaces // Function spaces, interpolation theory and related topics. Proc. of the internat. conf. in honour of J. Peetre. Lund, Sweden, August 17–22, 2000. Berlin: Walter de Gruyter, 2002. P. 241–248.
8. *Khinchine A.* Über dyadiche Bruche // Math. Z. 1923. V. 18. P. 109–116.
9. *Hitczenko P.* Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence // Israel J. Math. 1993. V. 84. P. 161–178.
10. *Асташкин С. В.* Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. №1. С. 18–35.
11. *Асташкин С. В.* О рядах по системе Радемахера, “близких” к $L_\infty$ // Функц. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. №3. С. 62–65.
12. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
13. *Brudnyi Yu. A., Krugljak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North-Holland, 1991.
14. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
15. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II: Function spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
16. *Bennett C., Rudnick K.* On Lorentz–Zygmund spaces // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1980. V. 175. P. 5–67.
17. *Рутицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // УМН. 1965. Т. 20. №4. С. 205–208.
18. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
19. *Cwikel M., Nilsson P.* Interpolation of Marcinkiewicz spaces // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 29–42.
20. *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к $L_\infty$ // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №6. С. 882–889.
21. *Kalton N. J.* Calderon couples of rearrangement invariant spaces // Studia Math. 1993. V. 106. №3. P. 233–277.
22. *Асташкин С. В* Коэффициенты Фурье–Радемахера функций из симметричных пространств // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41. №4. С. 729–739.

Самарский государственный университет
*E-mail*: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
08.10.2002